

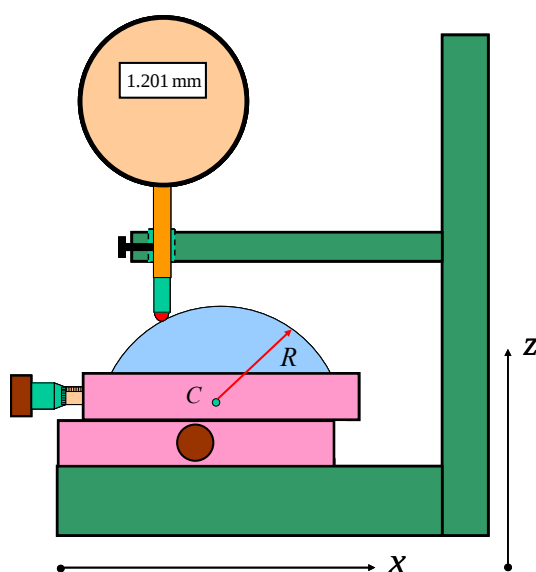
MĚŘENÍ TVARU PLOCH

ZADÁNÍ ÚLOHY

1. Změřte tvar plochy pomocí souřadnicového měřicího zařízení.
2. Proveďte rekonstrukci tvaru plochy na počítači.
3. Určete poloměr sférické plochy pomocí sférometru.

1. MĚŘENÍ TVARU PLOCHY POMOCÍ SOUŘADNICOVÉHO MĚŘICÍHO ZAŘÍZENÍ

Souřadnicové měřicí zařízení se skládá z křížového mikrometrického stolku a číslicového úchylkoměru posuvného ve svislém směru – tím je zajištěno měření polohy ve třech navzájem kolmých osách x , y , z .



Obr. 1 – Princip měření na souřadnicovém měřicím zařízení

Umístěte měřenou plochu na křížový stolek a zafixujte její polohu pomocí upevňovacích magnetů. Proveďte měření souřadnic bodů plochy. Měření provádějte na rovnoměrně rozdělené síti bodů v rovině xy křížového stolku. Dělení ve směru os volte po 5 mm (rozsah pohybu křížového stolku je 25 mm, tedy získáte souřadnice 36 bodů plochy).

Naměřené hodnoty poloh stolku x , y a hodnoty z odečtené na digitálním číslicovém úchylkoměru zaznamenejte do PC (MATLAB) pro následující vyhodnocení.

Obdobným způsobem proveďte měření a zpracujte výsledky pro všechny zadané plochy.

2. POČÍTAČOVÉ ZPRACOVÁNÍ A VYHODNOCENÍ MĚŘENÍ

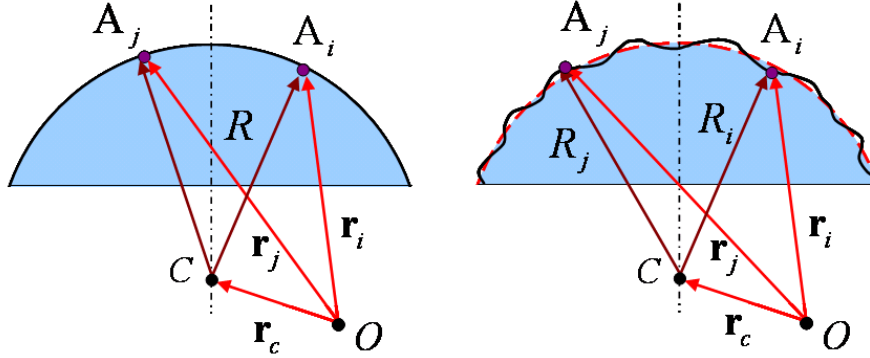
Proveďte analýzu naměřených dat. Metodou nejmenších čtverců proložte sférickou plochu naměřenými daty a zjistěte poloměr této sféry. Vypočítejte charakteristiku RMS této aproximace.

Aproximace měřených dat sférickou plochou

Uvažujme situaci znázorněnou na následujícím obrázku. Necht' O je počátek souřadné soustavy, C střed koule, R poloměr koule a A_i libovolný bod na povrchu koule. Rovnici koule můžeme psát ve vektorovém tvaru jako

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c)^T = R^2, \quad (1)$$

kde $\mathbf{r}_i$ je polohový vektor bodu $A_i = [x_i, y_i, z_i]$ ležícího na povrchu koule a $\mathbf{r}_c$ je polohový vektor středu koule $C = [x_c, y_c, z_c]$.



Obr. 2 – Aproximace dat sférickou plochou

Měřením s pomocí souřadnicového měřicího zařízení získáme souřadnice M bodů $[x_i, y_i, z_i]$ na povrchu koule. Napíšeme-li si předcházející rovnici koule pro dva různé body A_i a A_j na povrchu, tj.

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c)^T = R^2, \quad (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c)^T = R^2, \quad (2)$$

potom jejich vzájemným odečtením dostaneme a po úpravě dostaneme

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\mathbf{r}_c^T = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_i^T - \mathbf{r}_j\mathbf{r}_j^T), \quad i \neq j. \quad (3)$$

Napíšeme-li si nyní předchozí rovnici pro všechny kombinace bodů i a j , potom získáme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_c^T = \mathbf{b}^T, \quad (4)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 - x_M & y_1 - y_M & z_1 - z_M \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{M-1} - x_M & y_{M-1} - y_M & z_{M-1} - z_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_1^2 - r_2^2 \\ r_1^2 - r_3^2 \\ \vdots \\ r_1^2 - r_M^2 \\ r_2^2 - r_3^2 \\ r_2^2 - r_4^2 \\ \vdots \\ r_{M-1}^2 - r_M^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_c^T = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}, \quad (5)$$

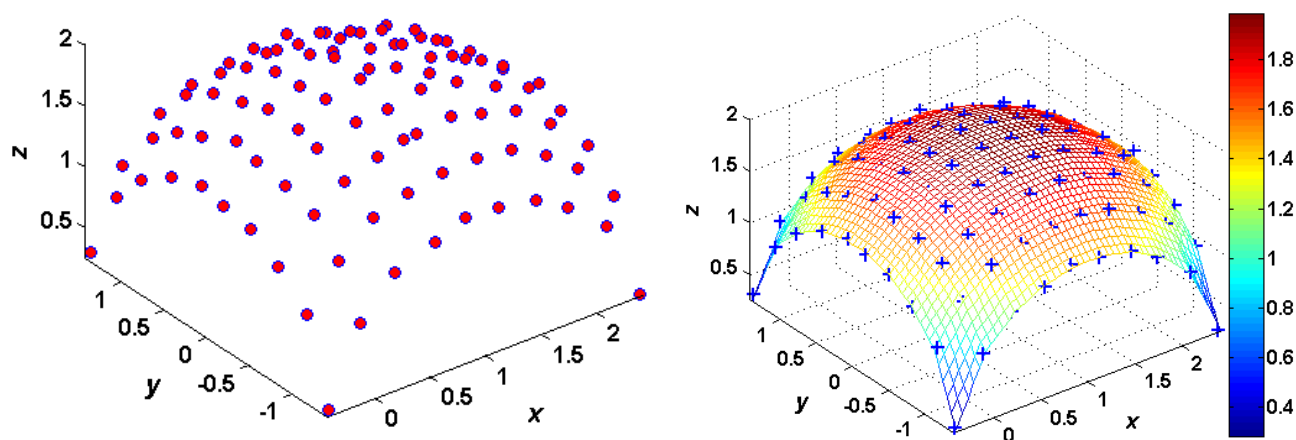
$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Řešením této soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců vypočteme polohový vektor $\bar{\mathbf{r}}_c^T$ středu koule C, platí

$$\bar{\mathbf{r}}_c^T = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}^T. \quad (6)$$

Poloměr R koule poté určíme jako průměrnou hodnotu vzdáleností jednotlivých měřených bodů na povrchu koule od jejího středu, tj.

$$R = \frac{\sum_{i=1}^M R_i}{M}, \quad R_i = \sqrt{(x_i - \bar{x}_c)^2 + (y_i - \bar{y}_c)^2 + (z_i - \bar{z}_c)^2}. \quad (7)$$



Obr. 3 – Měřené body a jejich aproximace sférickou plochou

3. MĚŘENÍ POLOMĚRU SFÉRICKÉ PLOCHY POMOCÍ SFÉROMETRU

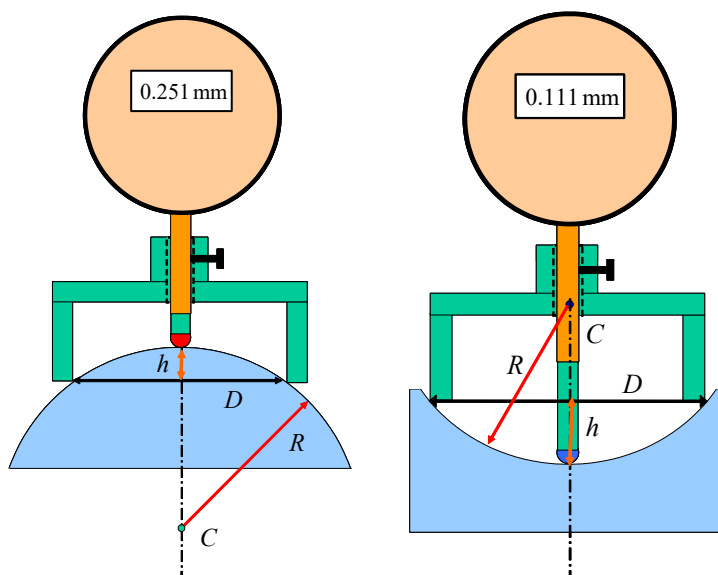
Prostudujte si návod ke sférometru a poté proveďte měření zadaných vzorků sférických ploch. Použijte všechny průměry sond sférometru, které jsou pro měření dané plochy vhodné, a proveďte výpočet poloměru sférické plochy. Poloměr sférické plochy je dán vztahem:

$$R = \frac{(D/2)^2 + h^2}{2h}, \quad (8)$$

kde h – je výška kulového vrchlíku (odečteme z číslicového úchylkoměru) a D je průměr sondy sférometru.

Pozor na hodnotu D – u jednotlivých sond jsou uvedeny vždy dvě hodnoty a to vnitřní a vnější průměr prstence sondy. Při měření sférické plochy vypuklé (konvexní) se uplatní vnitřní průměr a naopak při měření sférické plochy vyduté (konkávni) se uplatní vnější průměr sondy.

Naměřené hodnoty zpracujte statisticky – odhadněte skutečnou hodnotu poloměru a její nejistotu pro 95% interval spolehlivosti. Výsledky porovnejte s hodnotami získanými z předchozí metody.



Obr. 4 – Princip měření pomocí sférometru

POŽADOVANÉ KROKY POSTUPU A VÝSTUPY

Všechny výpočty provádějte v prostředí MATLAB. Výsledné nejistoty uvádějte pro 95% interval spolehlivosti.

1. Proved'te měření zadaných sférických ploch pomocí souřadnicového měřicího zařízení. Měření provádějte na rovnoměrné síti bodů v rovině křížového stolku. Dělení volte po 5 mm. Získané hodnoty souřadnice z společně s polohami stolku x , y zapisujte vhodně do editoru programu MATLAB.
2. Proved'te analýzu naměřených dat. Aproximujte měřená data sférou metodou nejmenších čtverců a vypočtete poloměr měřené sférické plochy společně s odhadem nejistoty pro 95% interval spolehlivosti, výstupy zpracujte graficky.
3. Proved'te měření poloměru křivosti zadaných sférických ploch pomocí sférometru. Měřte pomocí všech vhodných sond, každou plochu změřte 10krát. Získané výsledky zpracujte statisticky, tj. určete průměrnou hodnotu poloměru a odhadněte nejistotu pro 95% interval spolehlivosti.
4. Porovnejte hodnoty poloměrů pro jednotlivé plochy z bodů 2. a 3.

POMŮCKY

sférometr, souřadnicové měřicí zařízení (digitální číslicový úchylkoměr, křížový stolek se stojanem, držák na číslicový úchylkoměr), měřené vzorky ploch, magnety pro upevnění vzorků, počítač