

Výpočet tepelné kapacity kalorimetru a její kombinované standardní nejistoty

Pro výpočet tepelné kapacity kalorimetru K použijeme vztah [1,2]

$$K = \frac{m_2 c_2 (t_2 - t) - m_1 c_1 (t - t_1)}{t - t_1} = \frac{m_2 c_2 (t_2 - t)}{t - t_1} - m_1 c_1, \quad (1)$$

kde m_1, c_1, t_1 postupně značí hmotnost první kapaliny, měrnou tepelnou kapacitu první kapaliny a teplotu první kapaliny, m_2, c_2, t_2 postupně značí tytéž veličiny pro druhou kapalinu, t je výsledná teplota směsi. V případě, že obě kapaliny jsou stejné, zjednoduší se vztah (1) na

$$K = \frac{m_2 c (t_2 - t)}{t - t_1} - m_1 c, \quad (2)$$

kde c je měrná tepelná kapacita kapaliny (např. voda).

Derivujeme podle všech veličin, které byly měřeny.

Výpočet kombinované standardní nejistoty $u_c(K)$ provedeme pomocí zákona přenášení variancí [3]. Měřené veličiny ve vztahu (2) jsou: hmotnost první kapaliny m_1 , teplota první kapaliny t_1 , hmotnost druhé kapaliny m_2 , teplota druhé kapaliny t_2 a výsledná teplota směsi t . Měrnou tepelnou kapacitu c považujeme za konstantní.

Podle všech měřených veličin provedeme derivaci vztahu (2) a derivace vyčíslíme odpovídajícími měřenými hodnotami, tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial m_1} &= -c, & \frac{\partial K}{\partial t_1} &= \frac{m_2 c (t_2 - t)}{(t - t_1)^2}, & \frac{\partial K}{\partial m_2} &= \frac{c (t_2 - t)}{t - t_1}, \\ \frac{\partial K}{\partial t_2} &= \frac{m_2 c}{t - t_1}, & \frac{\partial K}{\partial t} &= -\frac{m_2 c (t_2 - t)}{(t - t_1)^2} - \frac{m_2 c}{t - t_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Vyčíslíme veličinami, které jsou v derivacích přímo napsány.

Pomocí zákona přenášení variancí poté platí

$$u_c(K) = \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial m_1}\right)^2 u_c^2(m_1) + \left(\frac{\partial K}{\partial t_1}\right)^2 u_c^2(t_1) + \left(\frac{\partial K}{\partial m_2}\right)^2 u_c^2(m_2) + \left(\frac{\partial K}{\partial t_2}\right)^2 u_c^2(t_2) + \left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)^2 u_c^2(t)}, \quad (4)$$

kde $u_c(m_1), u_c(t_1), u_c(m_2), u_c(t_2), u_c(t)$ jsou kombinované standardní nejistoty měřených veličin. Jejich vyčíslení provedeme podle toho, jakým způsobem byly měřeny.

V případě, že nebylo prováděno opakované měření, nelze vypočítat odhad standardní nejistoty metodou typu A. Použijeme tedy pouze metodu typu B.

Teploty t_1, t_2, t byly měřeny pouze jednou, přímo a navíc stejným přístrojem (jedním teploměrem), tedy bude platit

$$u_c(t_1) = u_c(t_2) = u_c(t) = u_B(t) = \frac{\Delta_t}{\sqrt{12}}, \quad (5)$$

kde Δ_t charakterizuje přesnost odečtení hodnot teploty na teploměru (např. nejmenší možnou odečitatelnou hodnotu na displeji teploměru).

Budou-li **hmotnosti** m_1, m_2 měřeny stejným způsobem na jednom přístroji, poté platí

$$u_C(m_1) = u_C(m_2) = u_C(m). \quad (6)$$

Uvažujme dále, že hmotnosti byly určeny odečtením dvou hodnot hmotností (hmotnost kalorimetru s vodou a hmotnost samotného kalorimetru).

Je-li váženo na stejných vahách, poté pro jedno libovolné měření hmotnosti m' , které nebudeme opakovat (nejde tedy vypočítat nejistotu metodou typu A), platí

$$u_C(m') = u_B(m') = \frac{\Delta_{m'}}{\sqrt{12}}, \quad (7)$$

kde $\Delta_{m'}$ charakterizuje přesnost odečtení hodnot hmotnosti. Poté pro standardní kombinovanou nejistotu libovolné hmotnosti m , určenou jako rozdíl dvou měřených hmotností m'_1 a m'_2 ($m = m'_2 - m'_1$), bude platit

$$\begin{aligned} u_C(m) &= \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial m'_2}\right)^2 u_C^2(m'_2) + \left(\frac{\partial m}{\partial m'_1}\right)^2 u_C^2(m'_1)} = \sqrt{(1)^2 u_C^2(m'_2) + (-1)^2 u_C^2(m'_1)} \\ &= \sqrt{u_C^2(m'_2) + u_C^2(m'_1)} = \sqrt{2u_C^2(m')} \quad \text{Kombinovaná nejistota} \\ &= \sqrt{2} \cdot u_C(m'). \quad \text{rozdílu} \end{aligned} \quad (8)$$

Ve vztahu (8) jsme využili toho, že hmotnosti m'_1 a m'_2 jsou měřeny se stejnou přesností, $u_C(m'_1) = u_C(m'_2) = u_C(m')$, kde $u_C(m')$ je dáno vztahem (7). Nejistotu vypočtenou ve vztahu (8) poté po dosazení z (7) aplikujeme ve vztahu (6).

Uvážíme-li tedy výše zmíněné předpoklady $u_C(t_1) = u_C(t_2) = u_C(t)$ a $u_C(m_1) = u_C(m_2) = u_C(m)$, poté se vztah (4) zjednoduší na

$$u_C(K) = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial K}{\partial m_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial m_2}\right)^2\right] u_C^2(m) + \left[\left(\frac{\partial K}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial t_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)^2\right] u_C^2(t)}, \quad (9)$$

kde parciální derivace počítáme dle (3) a vyčíslíme podle měřených veličin. Nejistotu $u_C(m)$ vypočteme dle (8) a nejistotu $u_C(t)$ dle (5).

Zjednodušení pro stejně
přesně měřené veličiny

Příklad

Předpokládejme následující měření pro směšování vody o měrné tepelné kapacitě $c = 4180 \text{ J/K/kg}$: $m_1 = 0.100 \text{ kg}$, $m_2 = 0.150 \text{ kg}$, $t_1 = 25.0^\circ\text{C}$, $t_2 = 95.0^\circ\text{C}$, $t = 61.7^\circ\text{C}$. Schopnost odečtení teploty předpokládejme $\Delta_t = 0.1^\circ\text{C}$ a pro hmotnost uvažujme $\Delta_{m'} = 1 \text{ g} = 0.001 \text{ kg}$.

Dosazením do (2) dostáváme

$$K = 150.9 \text{ J/K}.$$

Pro vyčíslení jednotlivých derivací dle (3) poté platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m_1} &= -4180 \text{ J/kg/K}, & \frac{\partial K}{\partial t_1} &= 15.4650 \text{ J/K}^2, \\ \frac{\partial K}{\partial m_2} &= 3786.7 \text{ J/kg/K}, & \frac{\partial K}{\partial t_2} &= 17.0714 \text{ J/K}^2, & \frac{\partial K}{\partial t} &= -32.5365 \text{ J/K}^2.\end{aligned}$$

Dále bude v daném případě platit

$$\begin{aligned}u_c(t) &= u_B(t) = \frac{\Delta_t}{\sqrt{12}} = 0.0289 \text{ K}, \\ u_c(m) &= \sqrt{2} \cdot u_c(m') = \sqrt{2} \cdot u_B(m') = \sqrt{2} \frac{\Delta_{m'}}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta_{m'}}{\sqrt{6}} = 4.0825\text{e-}04 \text{ kg}.\end{aligned}$$

Po dosazení do (9) poté dostáváme

$$u_c(K) = 2.6 \text{ J/K}.$$

Použitá literatura

- [1] Toman J., Semerák P., *Fyzika 10 – Praktická cvičení*, Vydavatelství ČVUT, 2001.
- [2] Horák Z., *Praktická fyzika*, SNTL, 1958.
- [3] http://departments.fsv.cvut.cz/k102/sites/default/files/k102/vyuka/predmety/soubory/FY1_102FY_1_prezentace_web.pdf.