

1. Určení vlnové délky světla pomocí difrakční mřížky

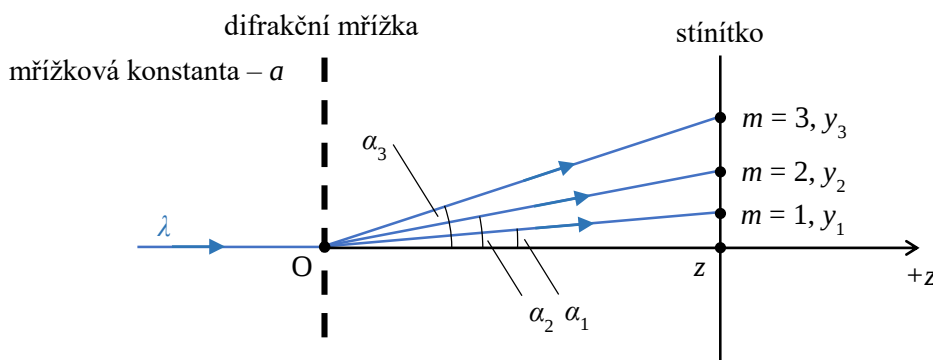
Petr Pokorný, Pavel Kulmon, Filip Šmejkal
LS 2016/17, skupina 1, datum měření: 19. 2. 2017

Zadání

Pomocí difrakční mřížky určete vlnovou délku zdroje záření (laserové ukazovátko). Pro výpočet použijte metodu nejmenších čtverců. Odhadněte nejistotu výsledné vlnové délky pro 95%ní interval spolehlivosti.

Teoretický úvod

Difrakce na mřížce



Obr. 1 Difrakce na mřížce

Měřením pomocí difrakční mřížky můžeme snadno určit vlnovou délku koherentního zdroje světla. Princip je ukázán na obr. 1. Laserový svazek dopadá na difrakční mřížku o mřížkové konstantě a (vzdálenost mezi dvěma vrypy) a dojde k přerozdělení energie takovým způsobem, že světlo pokračuje za mřížkou ve směru tzv. difrakčních řádů [1-3], jejichž stopu v příčné vzdálenosti y_m můžeme registrovat na stínítku. Z teorie difrakce na mřížce je známo, že pro úhel α_m m -tého difrakčního řádu (měřeno od optické osy viz obr. 1) platí vztah [1-3]

$$\sin \alpha_m = \frac{m\lambda}{a}, \quad (1)$$

kde λ je vlnová délka použitého záření, a je mřížková konstanta (vzdálenost mezi dvěma středy šterbin mřížky), m označuje difrakční řád. Pomocí příčné vzdálenosti y_m a vzdálenosti stínítka od difrakční mřížky z můžeme vztah (1) upravit na

$$\frac{ay_m}{\sqrt{y_m^2 + z^2}} = m\lambda. \quad (2)$$

Ze vztahu (2) je zřejmé, že vlnovou délku můžeme snadno určit pomocí měření tří veličin.

Výpočet vlnové délky světla pomocí metody nejmenších čtverců a odhad nejistot výsledné vlnové délky

Jak je patrné ze vztahu (2), vlnová délka představuje směrnici lineárního trendu, jehož hodnoty můžeme vyčíslit pomocí měření tří veličin: a – mřížková konstanta, y_m – příčná vzdálenost m -tého difrakčního řádu měřená na stínítku, z – vzdálenost stínítka od difrakční mřížky. Pro aplikaci metody nejmenších čtverců na výpočet vlnové délky formulujeme pomocí rovnice (2) následující lineární model pro N měření:

$$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{I}, \quad (3)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{ay_{m,1}}{\sqrt{y_{m,1}^2 + z^2}} \\ \frac{ay_{m,2}}{\sqrt{y_{m,2}^2 + z^2}} \\ \vdots \\ \frac{ay_{m,N}}{\sqrt{y_{m,N}^2 + z^2}} \end{bmatrix}.$$

Odhad skutečné hodnoty vlnové délky poté vypočteme metodou nejmenších čtverců pomocí vztahu [4,5]

$$\hat{\lambda} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{I}, \quad (4)$$

kde $\mathbf{P}$ je váhová matice, jejíž i -tý prvek p_i na diagonále bude dán vztahem (aplikujeme-li zákon přenášení variancí [4,5])

$$p_i = \frac{1}{u_C^2(\bar{y}_{m,i})},$$

$$u_C^2(\bar{y}_{m,i}) = \left[\frac{\bar{y}_{m,i}}{a} \right]^2 u_C^2(a) + \left[\frac{\bar{y}_{m,i} z^2}{y_{m,i}(y_{m,i}^2 + z^2)} \right]^2 u_C^2(y_{m,i}) + \left[\frac{\bar{y}_{m,i} z}{y_{m,i}^2 + z^2} \right]^2 u_C^2(z), \quad (5)$$

$$\bar{y}_{m,i} = \frac{ay_{m,i}}{\sqrt{y_{m,i}^2 + z^2}},$$

kde $\bar{y}_{m,i}$ označuje levou stranu rovnice (2) pro i -té měření a nejistoty $u_C(a)$, $u_C(y_{m,i})$ a $u_C(z)$ určíme odhadem kombinovaných nejistot přímých měření [4,5].

Předpokládejme, že každá z přímo měřených hodnot $y_{m,i}$ je měřena M -krát. Poté odhad nejistoty $u_C(y_{m,i})$ bude dán vztahem [4]

$$u_C(y_{m,i}) = \sqrt{\frac{u_A^2(y_{m,i}) + u_B^2(y_{m,i})}{M}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M (y_{m,i,j} - \tilde{y}_{m,i})^2}{M(M-1)} + \frac{u_B^2(y_{m,i})}{M}}, \quad (6)$$

kde $\tilde{y}_{m,i}$ značí průměr z M měření $y_{m,i}$ a $u_B(y_{m,i})$ je odhad nejistoty měření $y_{m,i}$ metodou typu B [4]. Dále předpokládáme, že parametry a a z jsou měřeny pouze jednou, poté platí zjednodušující rovnost $u_C(a) = u_B(a)$ a $u_C(z) = u_B(z)$.

Vztah (4) můžeme v tomto jednoduchém případě přepsat jako

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i \bar{y}_{m,i} m_i}{\sum_{i=1}^N p_i m_i^2}. \quad (7)$$

Odhad nejistoty $u(\lambda)$ vypočtené hodnoty vlnové délky poté získáme ze vztahu [4,5]

$$\begin{aligned} u^2(\lambda) &= \hat{s}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \frac{(\mathbf{A} \hat{\lambda} - \mathbf{1})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \hat{\lambda} - \mathbf{1})}{N-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N p_i (\bar{y}_{m,i} - \hat{\lambda} m_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N p_i m_i^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

kde $\hat{s}_0$ značí aposteriorní odhad jednotkové směrodatné odchylky [4,5].

Výsledný odhad rozšířené nejistoty (pro 95%ní interval spolehlivosti) hodnoty vlnové délky určíme jako

$$U_{95\%}(\lambda) = k_{95\%} u_C(\lambda), \quad (9)$$

kde $k_{95\%} = 1,96$.

Zpracování měřených dat

Difrakce na mřížce byla měřena pro 5 difrakčních řádů. Pro každý difrakční řád m ($m = 1 - 5$) byla třikrát změřena příčná vzdálenost $y_{m,i}$ měřítkem s nejistotou $u_B(y_{m,i}) = 0,5 \text{ mm}$, dále byla metrem jednou změřena vzdálenost z stínítka od difrakční mřížky s nejistotou $u_B(z) = 1 \text{ mm}$. Z kalibračního listu byla odečtena mřížková konstanta a s nejistotou $u_B(a) = 0,005 \text{ mm}$. V tab. 1 jsou uvedeny přímo měřené hodnoty, odhad jejich skutečných hodnot a kombinovaných nejistot. Tab. 2 poté ukazuje hodnoty lineárního modelu (2) vypočteného pomocí měřených veličin společně s jeho nejistotami danými vztahem (5), a dále dokumentuje výpočet metody nejmenších čtverců a odhad nejistot výsledného parametru – vlnové délky.

Tab. 3 ukazuje výslednou vypočtenou vlnovou délku společně s odhadem její nejistoty s 95%ním intervalem spolehlivosti. Na obr. 2 je poté zobrazen lineární model vypočtený z měření pomocí vztahu (2) společně s lineární aproximací vypočtenou metodou nejmenších čtverců viz předchozí kapitola.

Použitý výpočetní kód pro prostředí Matlab je uveden v Příloze 1. V Příloze 2 je poté doložen originál záznamu z měření.

Tabulka 1 Měřené hodnoty

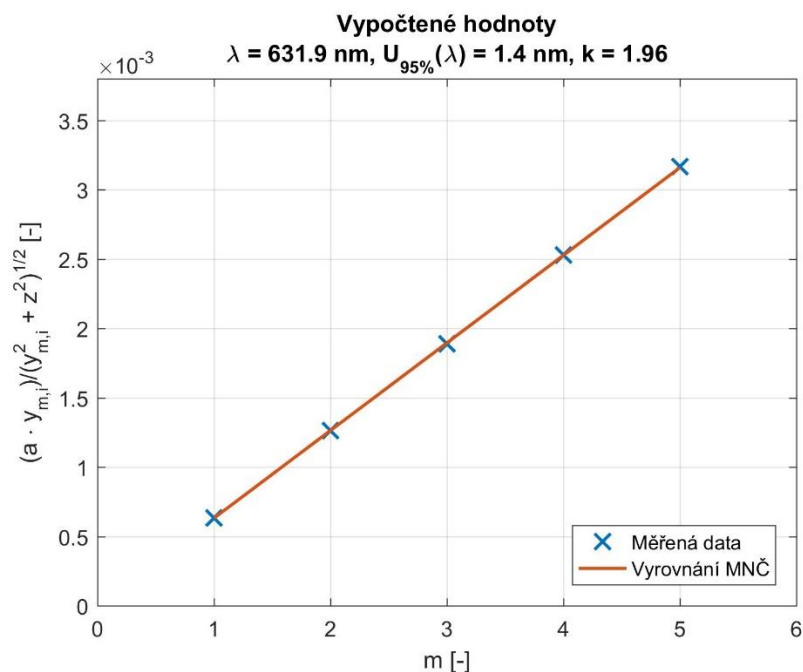
m	$y_{m,i}$ [mm]			$\tilde{y}_{m,i}$ [mm]	$u_C(y_{m,i})$ [mm]	$a [u_B(a)]$ [mm]	$z [u_B(z)]$ [mm]
1	31,7	31,5	31,8	31,67	0,30	0,02 [0,005]	1000 [1]
2	63,3	63,1	63,4	63,27	0,30		
3	94,9	94,9	94,7	94,83	0,30		
4	127,4	127,6	127,4	127,47	0,30		
5	160,3	160,2	160,5	160,33	0,30		

Tabulka 2 Vypočtené hodnoty lineárního modelu

m	$\bar{y}_{m,i} \cdot 1e-4$ [-]	$u(\bar{y}_{m,i}) \cdot 1e-4$ [-]
1	6,33	1,58
2	12,63	3,16
3	18,88	4,72
4	25,29	6,32
5	31,66	7,92
$\hat{\lambda}$ [nm]	631,85	
$u_C(\lambda)$ [nm]	0,70	
$U(\lambda)$ [nm], $k = 1,96$	1,36	

Tabulka 3 Výsledné hodnoty výpočtu

Vlnová délka [nm]	Nejistota [nm] ($k = 1,96$, interval spolehlivosti 95%)
631,9	1,4



Obr. 2 Zobrazení hodnot vypočteného lineárního modelu a výpočet vyrovnání metodou nejmenších čtverců

Diskuze

V rámci měření nedošlo k žádným výrazným komplikacím. Měřicí aparatura byla sestavena, dle pokynů bylo provedeno požadované měření a hodnoty zpracovány metodou nejmenších čtverců společně s odhadem nejistot pro 95%ní interval spolehlivosti.

Závěr

V úloze byla určována vlnová délka zdroje světla (laserové ukazovátko) pomocí difrakční mřížky. V práci je nejdříve prezentován teoretický úvod a potřebné vztahy použité při výpočtu. Byla měřena sada dat příčných vzdáleností na stínítku pro vybrané difrakční řády, vzdálenost stínítka od difrakční mřížky a z kalibračních listů byla dodána hodnota mřížkové konstanty. Metodou nejmenších čtverců byl poté vypočten odhad skutečné hodnoty vlnové délky použitého zdroje světla společně s odhadem rozšířené nejistoty pro 95%ní interval spolehlivosti. Výsledné hodnoty jsou: $\lambda = (631,9 \pm 1,4) \text{ nm}$. Hodnota se v rámci určené nejistoty shoduje s katalogovými údaji výrobce zdroje použitého záření.

V Praze dne 20. 2. 2017

Petr Pokorný, Pavel Kulmon, Filip Šmejkal

Použitá literatura

- [1] Horák Z., Krupka F., Šindelář V., *Technická fyzika*, SNTL, 1960.
- [2] Horák Z., *Praktická fyzika*, SNTL, 1958.
- [3] Brož J. a kol., *Základy fyzikálních měření I-III*, Státní pedagogické nakladatelství, 1967.
- [4] Pokorný P., *Metodika zpracování fyzikálních měření*, ČVUT v Praze, 2017, <http://departments.fsv.cvut.cz/k102> .
- [5] Mervart L., Lukeš Z., *Adjustment Calculus*, ČVUT v Praze, 2007.

Seznam příloh

Příloha 1 – Použitý kód pro zpracování úlohy v prostředí Matlab

Příloha 2 – Originál zápisu z měření

Příloha 1 – Použitý kód pro zpracování úlohy v prostředí Matlab

```
%% Merene hodnoty (pro MNC nutne zadat jako sloupceve vektory)
% difrakcni rady
m = [1:5]';

% merene polohy difrakcnich radu, kazdy meren 3x
ym_merene = [ 31.7  31.5  31.8
               63.3  63.1  63.4
               94.9  94.9  94.7
               127.4 127.6 127.4
               160.3 160.2 160.5];

% vzdalenost stinitka a mrizkova konstanta
z = 1000; a = 0.02;

%% Nejistoty merenych hodnot odhadnute metodou B
uBym = 0.5; uBa = 0.005; uBz = 1;

%% Zpracovani primo merenych hodnot
% odhad stredni hodnoty
ym = mean(ym_merene,2); % prumer ve smeru radku (viz help mean)

% odhad kombinovane nejistoty merenych parametru
N = size(ym_merene,2); % pocet mereni kazde veliciny
eym = ym_merene - repmat(ym,1,N); % odchylky mereni od prumeru
uCym = sqrt((sum(eym.^2,2)/(N-1) + uBym^2)/N);

%% Vypocet hodnot pro linearni zavislost (tvorba linearniho modelu)
y = a*ym./sqrt(ym.^2 + z^2);
x = m;

%% Vypocet nejistot velicin pro linearni zavislost (zakon prenosu varianci)
% derivace y podle merenych velicin
dy_ym = y*z^2./(ym.*(ym.^2 + z^2));
dy_z = y*z./(ym.^2 + z^2);
dy_a = y/a;

% nejistota uy
uCy = sqrt(dy_ym.^2.*uCym.^2 + dy_z.^2*uBz^2 + dy_a.^2*uBa^2);

%% Vahy pro MNC
p = uCy(1)^2./uCy.^2; % jako sig0 volena prvni z uCy
P = diag(p);

%% Vypocet MNC
A = x; l = y;
lam = (A'*P*A)\(A'*P*l);

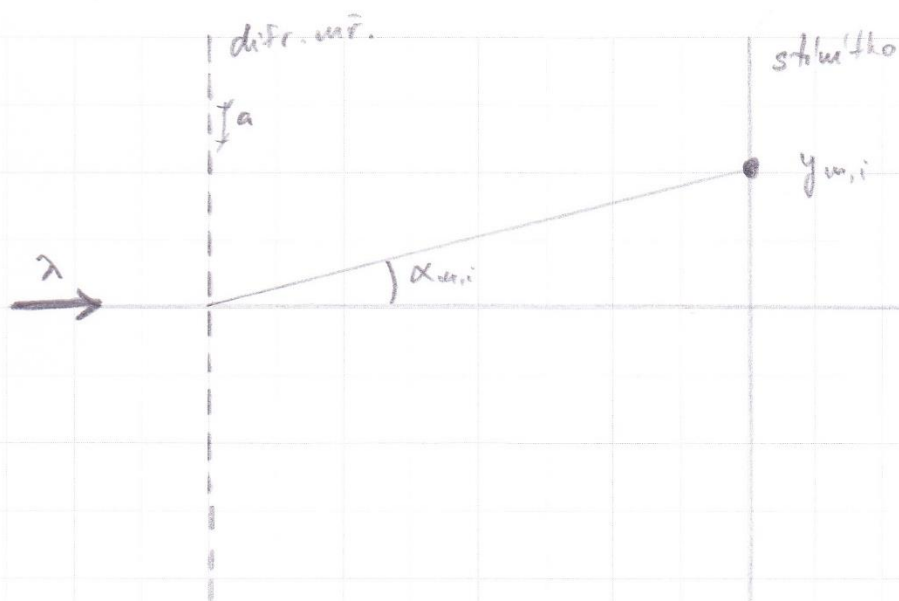
%% Nejistota z MNC
E = A*lam - l;
s0 = sqrt(E'*P*E/(size(A,1) - 1));
S = s0^2*inv(A'*P*A);
ulam = sqrt(diag(S));

%% Vysledna rozsirena nejistota lambda s 95%nim intervalem spolehlivosti
kp = 1.96;
Ulam = kp*ulam;

%% Zobrazeni vyslednych hodnot
fprintf('Vypoctene hodnoty [nm]: lam = %.1f, U95 = %.1f, k = %.2f\n', lam*1e+6, Ulam*1e+6, kp)

%% Graf
figure(1)
plot(x,y,'x',...
      x,A*lam,'-', 'LineWidth',1.5, 'MarkerSize',10)
grid on
xlim([0 max(x)+1])
ylim([0 max(y)+0.2*max(y)])
xlabel('m [-]')
ylabel('(a \cdot y {m,i})/(y^2 {m,i} + z^2)^{1/2} [-]')
title({'Vypočtené hodnoty', ['\lambda = ', num2str(lam*1e+6, '%.1f'), ...
                             ' nm, U_{95%}(\lambda) = ', num2str(Ulam*1e+6, '%.1f'), ' nm, k = ', num2str(kp, '%.2f')]})
legend('Měřená data', 'Vyrovnání MNČ', 'Location', 'SouthEast')
```

Příloha 2 – Originál zápisu z měření



$$a = 0,021 \text{ m} \quad u_5(a) = 0,005 \text{ mm}$$

$$z = 1000 \text{ mm} \quad u_5(z) = 1 \text{ mm}$$

m	$y_{m,i} [\text{mm}]$			$u_3(y_{m,i}) = 0,5 \text{ mm}$
1	31,7	31,5	31,8	
2	63,3	63,1	63,4	
3	94,9	94,9	94,7	
4	127,4	127,6	127,4	
5	160,3	160,2	160,5	

Poznámky: $u_3(a)$ z katalogu listů, $u_3(z)$ z rozlišení,

19.2/2017